Tema 3

Álgebra de Boole y circuitos con puertas lógicas

Los circuitos que componen una computadora son muy diversos: los hay destinados a aportar la energía necesaria para las distintas partes que componen la máquina y los hay dedicados a generar, procesar y propagar señales que contienen información. Dentro de este segundo grupo se distinguen a su vez circuitos que trabajan con información analógica y los que tratan con valores digitales. Este capítulo se centra en el estudio de estos últimos, los circuitos digitales y se presenta la base o fundamento teórico de los mismos, que es el álgebra de Boole.

Las puertas lógicas son una manera muy conveniente de realizar circuitos lógicos por lo que son usadas en las computadoras digitales. No hay espacio para describirlas en detalle, por lo que se explican los diversos tipos mostrando como se pueden realizar ciertas funciones con ellas.

3.1 Álgebra de Boole

En 1854 George Boole publicó un libro titulado "Investigación sobre las leyes del pensamiento", formulando un método simbólico para el estudio de las relaciones lógicas. Sus ideas tuvieron largo tiempo después una repercusión muy importante en diversas áreas. En el esquema ideado por Boole, las proposiciones o sentencias sólo pueden clasificarse en dos grupos: las verdaderas y las falsas. El resultado de combinar cierto número de sentencias es fácilmente deducible usando las propiedades de las operaciones en el álgebra. En 1938 Shannon encontró una aplicación: los circuitos eléctricos con interruptores. Éstos pueden ser analizados y diseñados empleando el álgebra de Boole y han hallado aplicación en diversos campos como la automatización .

Las computadoras digitales usan codificación binaria, por lo que una unidad elemental de información puede tomar sólo dos valores: cero o uno, lo cual deja abierta la puerta al uso de las técnicas de Shannon. En efecto, la base de las computadoras son circuitos lógicos como el de la figura 3.1, los cuales son analizados mediante el álgebra de Boole. En dicha figura el circuito se puede considerar como una máquina que transforma señales de entrada (la posición de los interruptores a, b, y c) en señales de salida (el estado de la lámpara L).

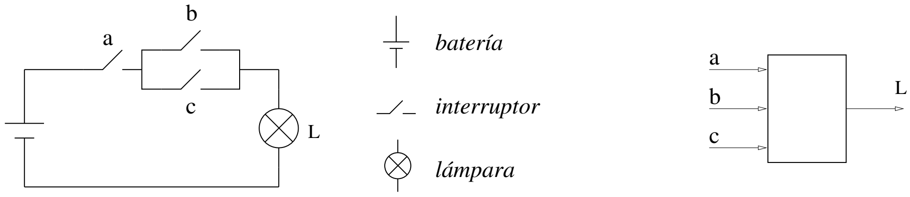


Figura 3.1: Ejemplo de circuito lógico con una batería, tres interruptores a, b, y c y una lámpara L.

3.1.1 Elementos básicos

Desde un punto de vista formal, el álgebra de Boole se compone de dos elementos: variables y operaciones, que se comentan a continuación.

- **Variables lógicas.** sólo pueden tomar un valor entre dos opciones excluyentes 0 y 1. En los circuitos con interruptores un interruptor puede estar abierto (0) o cerrado (1). Una lámpara puede estar encendida (1) o apagada (0). De este modo, el estado de los distintos elementos del circuito, se describe usando variables lógicas.

- **Operaciones.** Las operaciones permiten combinar variables lógicas para obtener como resultado otras variables. Las operaciones básicas del álgebra de Boole se describen a continuación.

  - **Suma lógica.** Se simboliza como $a + b$. El valor de la suma es 1 si y sólo si alguno o varios de los sumandos vale 1. El circuito de la figura 3.2 es un ejemplo que realiza la suma lógica. El valor de la variable f asociada al estado de la lámpara se puede obtener como suma lógica de las variables a y b correspondientes a los interruptores. A la izquierda en la figura se indica la tabla de sumar.

a \ b	0	1
0	0	1
1	1	1

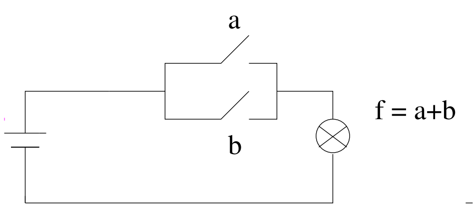


Figura 3.2: Tabla de verdad y circuito de la suma lógica de las variables a y b.

  La suma lógica equivale a la operación O puesto que $a + b$ produce un valor cierto (1) si y sólo si se cumple que "a es cierto o b es cierto". En el circuito de la figura 3.2 se comprueba que la lámpara luce si y sólo si "a está pulsado o b está pulsado".

  - **Producto lógico.** Se simboliza como $a \cdot b$. El producto dos variables es 1 sólo si ambas valen 1; en cualquier otro caso vale 0. El circuito de la figura 3.3 realiza la función $f = a \cdot b$.

  El producto lógico equivale a la operación Y puesto que $a \cdot b$ produce un valor cierto (1) si y sólo si se cumple que "a es cierto y b es cierto". En el circuito de la figura 3.2 se comprueba que la lámpara luce si y sólo si "a está pulsado y b está pulsado".

  - **Negación.** Esta operación actúa sobre una sola variable y se simboliza como $\overline{a}$. La negación produce como resultado el valor contrario al dado; es decir, si una variable

a \ b	0	1
0	0	0
1	0	1

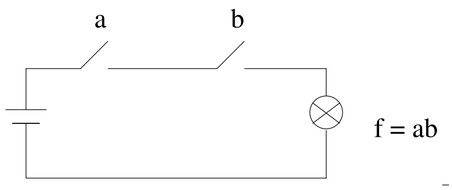


Figura 3.3: El circuito mostrado ilustra la operación producto lógico.

vale 1 su negado es 0 y si vale 0 su negado es 1. Esto puede ser ilustrado mediante la figura 3.4. Si la variable a pasa a valer 1, el interruptor se cierra, por lo que la intensidad eléctrica deja de pasar por la lámpara por tener el interruptor una resistencia mucho menor. La lámpara se apaga por lo que $f = 0$. Es fácil ver que si $a = 0$ la lámpara vuelve a lucir $f = 1$.

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

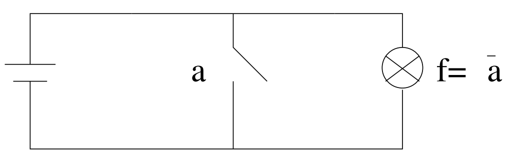


Figura 3.4: El circuito ilustra la operación de negación.

La negación equivale a la operación NO puesto que $\overline{a}$ toma el valor cierto si y sólo si "a no es cierto".

3.1.2 Representación de circuitos

En los diagramas de los circuitos con interruptores se indican los distintos elementos (batería, interruptores y lámpara) mediante símbolos convencionales. El estado en que se dibuja el símbolo no indica la situación del componente. Es decir, un interruptor abierto y uno cerrado se representan del mismo modo. Es el valor de la variable asociada quien indica el estado del elemento. De este modo, si la variable asociada a un interruptor vale 1 indica que el circuito está cerrado, pero el dibujo no se modifica.

Esta situación se complica a veces en diagramas en los que intervienen interruptores "normalmente cerrados". Estos interruptores se dibujan en posición cerrada porque ese es su estado cuando la variable asociada toma el valor cero. Afortunadamente esta clase de interruptores pueden obviarse en nuestra descripción de circuitos lógicos.

Los circuitos con interruptores han sido usados en la automatización de tareas como el encendido gradual de motores, el movimiento de ascensores, el ciclo de luces en semáforos, alarmas, etc. por lo que es habitual toparse con las representaciones esquemáticas correspondientes en áreas diversas.

3.1.3 Propiedades

Las operaciones definidas en el álgebra presentan una serie de propiedades que se indican a continuación:

- **Existencia de elementos neutros.** Para la suma el elemento neutro es el cero, pues $a+0 = a$. Para el producto el elemento neutro es el uno, pues $a \cdot 1 = a$.
- **Conmutatividad.** Esta propiedad expresa que $a + b = b + a$ para la suma y que $ab = ba$ para el producto.
- **Asociatividad.** Los paréntesis indican como es habitual el orden en el que se han de realizar las operaciones. Esta propiedad indica que $(a + b) + c = a + (b + c)$ y $(ab)c = a(bc)$.
- **Distributividad.** Esta propiedad involucra dos operaciones, la suma lógica y el producto lógico y puede expresarse como $(a + b)c = ac + bc$ y $a + (bc) = (a + b)(a + c)$.
- **Leyes de De Morgan.** Finalmente, esta propiedad permite realizar transformaciones de sumas y productos con variables normales y negadas. Se pueden expresar del siguiente modo: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{ab}$, y $\overline{a}\overline{b} = \overline{a + b}$

Existe dualidad entre la suma y el producto, de tal forma que, si una propiedad es cierta, la que resulta de cambiar la suma por el producto y 0 por 1 también es cierta.

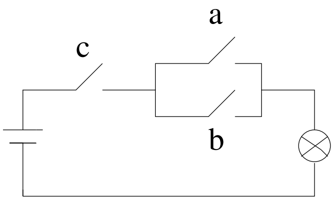
3.1.4 Funciones booleanas

Las operaciones con variables booleanas se pueden componer para formar funciones. Una función es por tanto una expresión que contiene operaciones booleanas. Para unos valores dados de las variables booleanas la expresión se puede evaluar obteniéndose el resultado. Un ejemplo de función booleana de tres variables es:

$$f : (a, b, c) \mapsto f(a, b, c) = c(a + b)$$

La función puede definirse de forma explícita dando los valores que toma para cada posible combinación de entradas. Esta representación se llama TABLA DE VERDAD. Para el ejemplo anterior la tabla de verdad se muestra en la figura 3.5. Además, se ha dibujado un circuito con interruptores que realiza la misma función. Puede comprobarse que el estado de la lámpara L viene determinado completamente por el valor de las variables a y b a través de la tabla de verdad.

Es interesante observar que La tabla de verdad, el circuito lógico y la expresión analítica $f(a, b, c) = c(a + b)$ proporcionan la misma información; es decir, son tres representaciones de una misma cosa. De este modo es posible pasar de cualquiera de ellas a las demás como se muestra a continuación.



L = f(a,b,c) = c (a+b)

a	b	c	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Figura 3.5: Ejemplo de función booleana, tabla de verdad y circuito con interruptores.

3.1.5 Obtención de funciones booleanas a partir de tablas de verdad

Existen varios métodos para describir una función booleana. Uno de ellos es mediante la tabla de verdad, que proporciona los valores de la salida para todas las combinaciones de las entradas. Alternativamente se puede expresar la función booleana usando el producto lógico y la suma lógica. En este apartado se indica el método para obtener tales expresiones a partir de la tabla de verdad. La justificación del método no se proporciona pero puede hallarse en la bibliografía recomendada.

Dada una tabla de verdad como

a	b	s
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

estamos interesados en hallar una expresión $s = f(a, b)$. Esto se va a conseguir a base de sumas de productos lógicos de las variables a y b y los negados de éstas. Para ello se han de señalar las filas de la tabla de verdad en las que la salida es uno.

a	b	s
0	0	0
0	1	$\underline{\mathbf{1}}$
1	0	0
1	1	$\underline{\mathbf{1}}$

cada una de estas filas representará como veremos un sumando en una suma de productos. El producto se forma tomando las variables a y b o sus negados en función de que el valor de la misma en la fila señalada sea cero o uno. Tomemos por ejemplo la fila 2: la variable a vale cero en dicha fila, por lo que se tomará negada, la variable b vale uno, por lo que se tomará sin negar. El producto correspondiente a esta fila es $\overline{a}b$. Este término ha de sumarse al correspondiente a las demás filas señaladas.

a	b	c	s
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$f(a,b,c) = \overline{a}\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,b\,c + a\,\overline{b}\,c$$

Figura 3.6: Obtención de una función booleana como suma de productos a partir de la tabla de verdad.

Pasamos a la siguiente fila con salida uno, que es la cuarta. La variable a vale uno, por lo que se tomará sin negar, la variable b vale uno, por lo que se tomará sin negar. El producto correspondiente a esta fila es ab.

De este modo se obtiene que la función booleana es $f(a,b) = \overline{a}b + ab$. Es posible comprobar la equivalencia entre s y f obteniendo todos los posibles valores de f y comparando con la tabla de verdad.

El método explicado proporciona funciones booleanas que son a menudo simplificables; por ejemplo, la función anterior puede expresarse como $f(a,b) = \overline{a}b + ab = (\overline{a} + a)b = b$. Esta última forma de expresar f contiene menos términos y por tanto se dice que está simplificada. El problema de la simplificación no será tratado aquí.

En la figura 3.6 se ilustra otro ejemplo, obteniéndose una función booleana $f(a,b,c)$ a partir de la tabla de verdad. Se ha indicado mediante líneas el origen de cada uno de los sumandos.

3.2 Puertas lógicas

Los circuitos con interruptores mecánicos podrían usarse para construir computadoras, pero tienen ciertas desventajas, como son su alto consumo, dificultad de miniaturización y baja velocidad debido a la existencia de piezas móviles. Las PUERTAS LÓGICAS son dispositivos electrónicos que realizan funciones booleanas y no contienen contactos móviles. Los elementos básicos con los que se construyen las puertas lógicas son componentes semiconductores como son el diodo y el transistor.

Las puertas lógicas son usadas en muchas aplicaciones eléctricas o electrónicas. Cada puerta lógica tiene su símbolo tal y como se muestra en la figura 3.7. Se describe a continuación cada una de ellas.

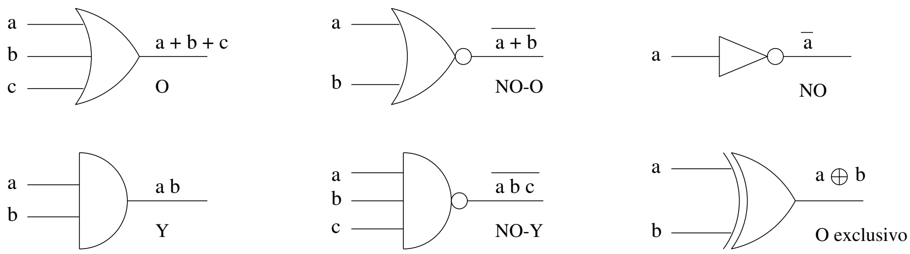


Figura 3.7: Símbolos para las puertas lógicas.

- **Suma lógica.** Simbolizada normalmente como puerta O[1] puesto que la operación que realiza es el O lógico. La tabla de verdad de una puerta O de dos entradas a y b es:

a	b	s
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- **Producto lógico.** La puerta que realiza el producto lógico es también llamada puerta Y. La tabla de verdad para dos entradas queda como sigue:

a	b	s
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- **Complementación.** : La puerta complementadora es también llamada puerta NO. La tabla de verdad es:

a	s
0	1
1	0

  que coincide con la de la negación, como se esperaba.

- **Suma lógica exclusiva.** La función suma lógica exclusiva[2] se representa mediante el símbolo $\oplus$. La tabla de verdad es:

a	b	$s = a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

  Esta función puede obtenerse como combinación de las funciones conocidas del siguiente modo: $a \oplus b = \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b}$, por lo que es posible construir una puerta O-exclusivo a partir de puertas suma, producto y negación.

[1]En inglés puerta OR.
[2]Llamada en inglés función XOR

- **O negado e Y negado.** El complementario de la operación suma lógica recibe el nombre de función NO-O y es la función $\overline{a+b}$. Similarmente, la función NO-Y es el negado de la operación producto lógico. Para realizar ambas funciones basta con conectar en serie una puerta O (o Y) con un negador. En la práctica existen circuitos que realizan directamente las funciones NO-O y NO-Y. El símbolo de estas puertas consiste en añadir un círculo en la salida como se puede ver en la figura 3.7.

En la figura 3.7 puede verse que algunas puertas lógicas tienen más de dos entradas. No se trata de un error, existen circuitos que realizan el producto o la suma lógica de más de dos variables y su representación es la indicada en la figura.

3.3 Ejemplos de circuitos lógicos

Los circuitos lógicos permiten realizar muchas funciones diferentes; por ello han encontrado aplicación en la automatización de tareas. Equipos tales como: semáforos, alarmas, interruptores automáticos, etc. funcionan gracias a circuitos que contienen puertas lógicas. En el ámbito de la informática estos circuitos son la base para memorias, unidades de cálculo, etc.

A modo de ejemplo se van a describir algunos circuitos que tienen utilidad en máquinas de cálculo automático. En un capítulo posterior se mostrarán otros circuitos que forman parte de la unidad aritmético-lógica.

3.3.1 Paridad

Este circuito proporciona un valor uno si el número de entradas con valor uno es par. A modo de ejemplo consideremos un circuito de dos entradas a y b. La salida p ha de valer uno cuando ambos a y b valen cero o cuando ambos valen 1. Aplicando esta regla la tabla de verdad resulta:

a	b	p
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

de donde se deduce que $p = \overline{a}\overline{b} + ab$.

La paridad de tres bits a, b y c puede calcularse de forma parecida, resultando la función $q = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}bc + a\overline{b}c + ab\overline{c}$ como es fácil comprobar.

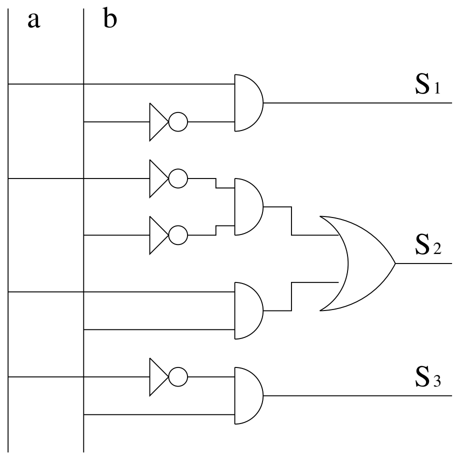


Figura 3.8: Circuito comparador realizado con puertas lógicas.

3.3.2 Comparador

Un dispositivo comparador permite averiguar la relación entre dos bits a y b. Las situaciones que pueden darse son: $a > b$, $a = b$ o $a < b$, por tanto, el dispositivo comparador ha de proporcionar uno de tres valores posibles. Considérese el circuito de la figura 3.8 se observa que tiene tres salidas $s1, s2$ y $s3$. El significado es el siguiente:

$$\left|\begin{array}{lcl} \text{si } a > b & \Longrightarrow & s_1 = 1,\ s_2 = s_3 = 0 \\ \text{si } a = b & \Longrightarrow & s_2 = 1,\ s_1 = s_3 = 0 \\ \text{si } a < b & \Longrightarrow & s_3 = 1,\ s_1 = s_2 = 0 \end{array}\right.$$

Es decir, la salida s_1 se activa cuando el primer bit es mayor que el segundo. La segunda se activa cuando son iguales y la tercera cuando el segundo bit es mayor que el primero. La tabla de verdad para las distintas salidas es fácil de obtener:

a	b	s_1	s_2	s_3
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0

Por aplicación de la regla de sumas de productos a la tabla anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} s_1 &= a \cdot \overline{b} \\ s_2 &= \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b \\ s_3 &= \overline{a} \cdot b \end{aligned}$$

Con estas expresiones es fácil componer el diagrama mostrado en la figura 3.8.

3.3.3 Mayoría

Un circuito mayoría admite un número N de entradas que pueden valer 0 o 1. La salida del circuito es uno si y sólo si la mayoría de las señales de entrada valen 1. Es decir, el valor de la salida es el indicado por el de la mayoría de las entradas, por lo que este dispositivo puede usarse para calcular el ganador de una votación en la que hay dos propuestas.

Para concretar considérese la figura 3.9 donde el bloque simboliza el circuito mayoría. Se han tomado tres entradas que son las señales e_1, e_2 y e_3. Por definición, la salida s ha de valer uno si existen dos o más entradas que valen uno; en caso contrario la salida vale cero. La tabla de verdad es:

e_1	e_2	e_3	s
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

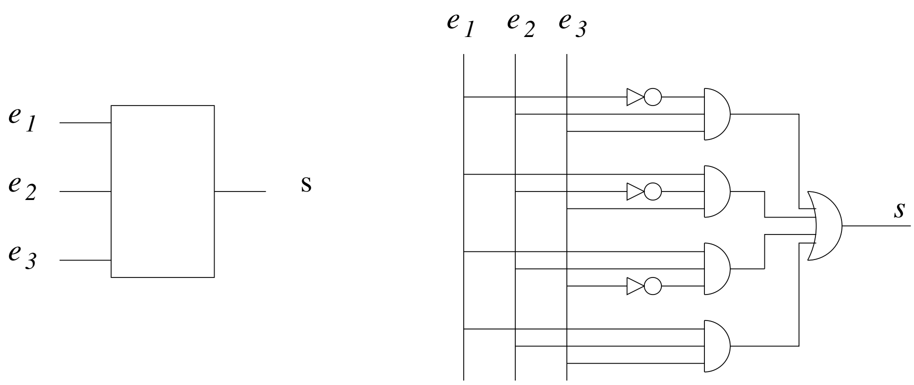


Figura 3.9: Circuito para calcular la mayoría.

De esta tabla se obtiene la función booleana que verifica el circuito mayoría.

$$s = \overline{e_1}e_2e_3 + e_1\overline{e_2}e_3 + e_1e_2\overline{e_3} + e_1e_2e_3$$

La realización del circuito con puertas lógicas no presenta ninguna dificultad, como puede verse en la mencionada figura 3.9. Nuevamente se ha obviado la posible simplificación de la función obtenida.

3.4 Ejercicios propuestos

Los siguientes ejercicios sirven para consolidar las ideas más importantes de este tema. No simplificar las funciones lógicas para el diseño de los circuitos con puertas lógicas.

1. Se desea construir un circuito con puertas lógicas. Las entradas a, b y c representan los bits de un número binario entero no negativo, y la salida f vale "1" si el número es una potencia exacta de 2 y cero en caso contrario.

2. Se desea diseñar un circuito con puertas lógicas para convertir un número binario, de tres bits, codificado en complemento a 2 al formato signo-valor absoluto.

3. Se desea diseñar un circuito con puertas lógicas que duplique un número binario entero de 3 bits no negativo.